Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 783821 15 luglio 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	c
3	c
4	c
5	a
6	b
7	b
8	d
9	d
10	c

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x^2) < 0\}$. Allora

► (a) $\inf(A) = -\infty$ (b) $\inf(A) = 0$ (c) $\sup(A) = \frac{\pi}{2}$ (d) $\sup(A) = 1$

Soluzione:

Sia $f(x) = \cos(x^2)$.

Osserviamo che la funzione f assume valori negativi per valori di x arbitrariamente piccoli. Ad esempio consideriamo

$x_n = -\sqrt{(2n+1)\pi}$

$f(x_n) = \cos\left(\left(-\sqrt{(2n+1)\pi}\right)^2\right) = \cos\left((2n+1)\pi\right) = -1 < 0$

quindi $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Poichè $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ otteniamo che $\inf(A) = -\infty$.

2. La funzione $f : \left(0, \frac{1}{e}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{\log x}\right)$

(a) ha minimo

(b) ha massimo

► (c) è superiormente limitata ma non ha massimo

(d) è inferiormente limitata ma non ha minimo

Soluzione:

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \qquad f : \left(0, \frac{1}{e}\right) \to \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{-\infty}\right) = \log(1+0) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{-1}\right) = \log(0) = -\infty.$$

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che f è superiormente limitata (f è continua).

Sempre per lo stesso teorema f ha massimo se e solo se esiste $x_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ t.c. $f(x_0) \geq 0$.

$$f(x) \geq 0 \iff \log\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \geq 0 \iff 1 + \frac{1}{\log x} \geq 1 \iff \frac{1}{\log x} \geq 0$$

$\iff \log x \geq 0 \iff x \geq 1$ che è impossibile se $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Quindi f non ha massimo.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(-x)\, dx =$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) -1

► (c) $-\frac{1}{2}\log 2$

(d) $\log \pi - \log 4$

Soluzione:

$$\int tg(-x)\,dx = \int -tg\,x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$-\sin x\,dx = dt$

$$\Rightarrow \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} tg(-x)\,dx = \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} = \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| =$$

$$= \log\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\log 1} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log 2.$$

4. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx =$

(a) $-\frac{e}{2}$ (b) e ► (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{e^2}{2}$

Soluzione:

Cerchiamo una primitiva di $x^3 e^{x^2}$ con la sostituzione

$x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 2x$ $\quad x\,dx = \frac{dt}{2}$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2 e^{x^2}\,x\,dx = \int \frac{t e^t}{2}\,dt$$

ora integriamo per parti derivando t e integrando e^t

$$\int \frac{te^t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int 1\cdot e^t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right) + c$$

$$= \frac{e^t}{2}(t-1) + c = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)\right]_0^1 = \cancel{\frac{e}{2}(1-1)} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x}\,dx$

► (a) converge (b) diverge positivamente (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x^2+2x}$ e osserviamo che f è continua $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0)$. La funzione non è definita per $x=0$ ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{2}$$

quindi f è limitata e l'integrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\,dx$

(a) non esiste ► (b) diverge negativamente (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx.$$

La funzione integranda è continua in $(1,+\infty)$ e non limitata in un intorno di 1.

Dividiamo l'intervallo di integrazione in $(1,2] \cup [2,+\infty)$.

Per $x \to 1^+$ $\left|\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)\right| \le 1$ quindi $\int_1^2 \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) dx$

converge assolutamente (quindi converge). Invece, $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_{\varepsilon}^{1} -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt \quad (\text{sostituzione } x = 1+t)$$

quindi $\int_1^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_0^1 -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt$ e questo integrale

diverge negativamente perché $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$

quindi $\lim_{t \to 0} \dfrac{-\frac{1}{\log(1+t)}}{-\frac{1}{t}} = 1$ e $\int_0^1 -\frac{1}{t}\, dt = -\infty$ (confronto asintotico).

$$\Rightarrow \int_1^2 \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx = -\infty.$$

Per $x \to \infty$ $\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$

quindi $\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$

Dato che $\int_2^{+\infty} -\frac{1}{6} \frac{1}{\log^3 x}\, dx = -\infty$, per il criterio del

confronto asintotico $\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx = -\infty$.

Quindi $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx$ diverge negativamente.

7. Data la successione $a_n = \dfrac{n\, 2^n}{n!}$ risulta che

(a) (a_n) è strettamente crescente

► (b) (a_n) è limitata

(c) $\sup(a_n) = 0$

(d) $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

Osserviamo che $a_n \geq 0 \ \forall n$ e che

$$a_n = \frac{n\,2^n}{n(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Calcoliamo il limite usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^n} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pertanto (a_n) è limitata.

8. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$

(a) è indeterminata

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge positivamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}\right| = \frac{1}{n^2+\cos^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente.

9. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$ è

(a) un'unione di infiniti dischi disgiunti

(b) la parte di piano delimitata da una parabola

(c) l'esterno di un disco

► (d) l'unione disgiunta di infinite corone circolari

Soluzione:

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$.

Ricordiamo che $\sin t > 0 \iff t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $(x,y) \in \Omega \iff 2k\pi < x^2+y^2-1 < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni fissato $k \geq 0$, l'insieme

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1\}$$

è una corona circolare di centro l'origine e raggi

$\sqrt{2k\pi+1}$, $\sqrt{(2k+1)\pi+1}$.

Ω è quindi l'unione di infinite corone circolari disgiunte tra loro.

10. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) è differenziabile

(b) è continua ma non è differenziabile

► (c) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua

(d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot0}{h^2+0}-0\right)=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2}-0\right)=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t)=(t,t)$.

$$\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 926678 15 luglio 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	b
3	d
4	a
5	c
6	a
7	c
8	b
9	c
10	c

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x^2) < 0\}$. Allora

▶ (a) $\inf(A) = -\infty$ (b) $\sup(A) = \frac{\pi}{2}$ (c) $\sup(A) = 1$ (d) $\inf(A) = 0$

Soluzione:

Sia $f(x) = \cos(x^2)$.

Osserviamo che la funzione f assume valori negativi per valori di x arbitrariamente piccoli. Ad esempio consideriamo

$x_n = -\sqrt{(2n+1)\pi}$

$f(x_n) = \cos\left(\left(-\sqrt{(2n+1)\pi}\right)^2\right) = \cos\left((2n+1)\pi\right) = -1 < 0$

quindi $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Poichè $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ otteniamo che $\inf(A) = -\infty$.

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\sqrt{|x|}$

(a) è concava in un intorno di 0

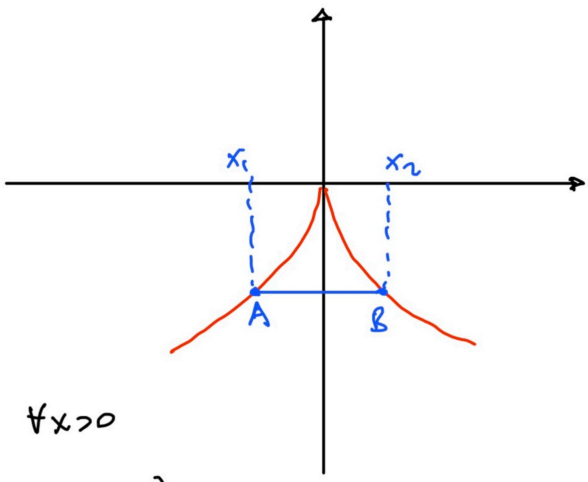
► (b) non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$

(c) ha un flesso per $x = 0$

(d) è convessa in $\mathbb{R}$

Soluzione:

$f(x) = -\sqrt{|x|}$



Consideriamo prima gli $x>0$.

$f(x) = -\sqrt{x} = -x^{1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2} > 0 \quad \forall x>0$

quindi f è convessa sulla semiretta $(0,+\infty)$, pertanto non è concava in $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora i punti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Il segmento che unisce i punti $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ è un tratto di retta orizzontale che sta sotto il grafico di f nell'intervallo $[x_1, x_2]$, quindi f non è convessa in $\mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(-x)\,dx =$

(a) $\log\pi - \log 4$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) -1

► (d) $-\frac{1}{2}\log 2$

Soluzione:

$$\int tg(-x)\,dx = \int -tg\,x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$-\sin x\,dx = dt$

$$\Rightarrow \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} tg(-x)\,dx = \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} = \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| =$$

$$= \log\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\log 1} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log 2 .$$

4. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\,dx =$

► (a) $-1 + 5\log\frac{5}{4}$ (b) $5\log 4 - 5\log 5$ (c) non esiste (d) $\frac{1}{4}$

Soluzione:

$$\int \frac{x+3}{2-x}\,dx = -\int \frac{x+3}{x-2}\,dx = -\int \frac{x-2+5}{x-2}\,dx = \int -1 - \frac{5}{x-2}\,dx =$$

$$= -x - 5\log|x-2| + c$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\,dx = \Big[-x - 5\log|x-2|\Big]_{-3}^{-2} = 2 - 5\log|-4| - 3 + 5\log|-5| =$$

$$= -1 + 5\log\frac{5}{4}$$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x}\,dx$

(a) diverge negativamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x^2+2x}$ e osserviamo che f è continua $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0)$. La funzione non è definita per $x=0$ ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{2}$$

quindi f è limitata e l'integrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_{0}^{e} (\log x)^3\,dx$

► (a) converge (b) non esiste (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^e (\log x)^3\,dx$$

Poniamo $f(x) = (\log x)^3$ e osserviamo che f è continua in $(0,e]$ e che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, basterà quindi esaminare la convergenza in un intorno destro di 0. Se consideriamo l'intervallo $(0,1)$ risulta $f(x)<0$, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ (ma andrebbe bene anche $\frac{1}{x^\alpha}$ con $0<\alpha<1$).

Risulta che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \log^3 x = 0 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x)dx$ converge, allora anche $\int_0^1 f(x)dx$ converge

quindi $\int_0^e f(x)dx$ converge.

7. Data la successione $a_n = \dfrac{n\,2^n}{n!}$ risulta che

(a) $\sup(a_n) = 0$

(b) (a_n) è strettamente crescente

► (c) (a_n) è limitata

(d) $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

Osserviamo che $a_n \geq 0$ $\forall n$ e che

$$a_n = \frac{n\,2^n}{n(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Calcoliamo il limite usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^n} = \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{per } n\to+\infty,$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pertanto (a_n) è limitata.

8. La serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$

(a) è indeterminata

► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}\right| = \frac{1}{n^2+\cos^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente.

9. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$ è

(a) la parte di piano delimitata da una parabola

(b) l'esterno di un disco

► (c) l'unione disgiunta di infinite corone circolari

(d) un'unione di infiniti dischi disgiunti

Soluzione:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}.$$

Ricordiamo che $\sin t > 0 \iff t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $(x,y) \in \Omega \iff 2k\pi < x^2+y^2-1 < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni fissato $k \geq 0$, l'insieme

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1\}$$

è una corona circolare di centro l'origine e raggi

$\sqrt{2k\pi+1}$, $\sqrt{(2k+1)\pi+1}$.

Ω è quindi l'unione di infinite corone circolari disgiunte tra loro.

10. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) è continua ma non è differenziabile

(b) è differenziabile

► (c) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua

(d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 947856 15 luglio 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	d
3	d
4	d
5	d
6	b
7	c
8	b
9	d
10	a

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x^2) < 0\}$. Allora

(a) $\sup(A) = \frac{\pi}{2}$ ► (b) $\inf(A) = -\infty$ (c) $\inf(A) = 0$ (d) $\sup(A) = 1$

Soluzione:

Sia $f(x) = \cos(x^2)$.

Osserviamo che la funzione f assume valori negativi per valori di x arbitrariamente piccoli. Ad esempio consideriamo

$x_n = -\sqrt{(2n+1)\pi}$

$f(x_n) = \cos\left(\left(-\sqrt{(2n+1)\pi}\right)^2\right) = \cos\left((2n+1)\pi\right) = -1 < 0$

quindi $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Poichè $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ otteniamo che $\inf(A) = -\infty$.

2. La funzione $f(x) = x + \dfrac{3|x|}{x}$, nel suo insieme di definizione,

(a) non ha asintoti di nessun tipo

(b) ha un asintoto verticale

(c) ha un asintoto orizzontale

► (d) ha due asintoti obliqui

Soluzione:

$$f(x) = x + \frac{3|x|}{x}$$

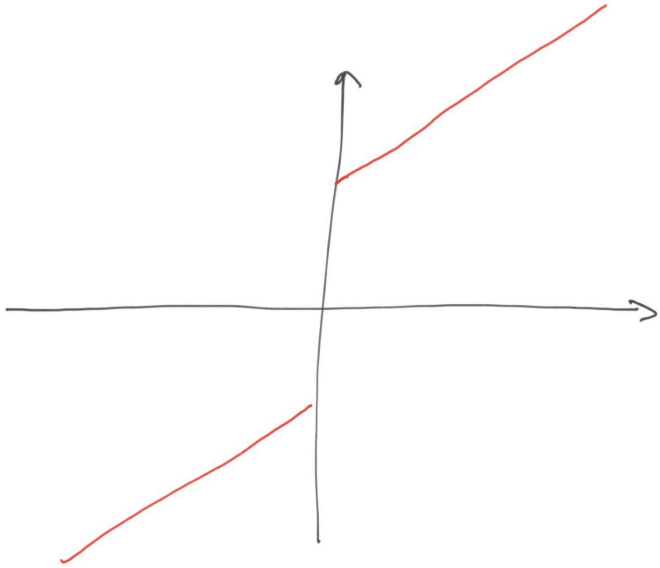
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x>0 \\ x-3 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

f non è definita per $x=0$.

f ha due asintoti obliqui di equazioni

$y = x+3$ per $x \to +\infty$

$y = x-3$ per $x \to -\infty$



3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(-x)\, dx =$

(a) $\log \pi - \log 4$

(b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) -1

► (d) $-\dfrac{1}{2}\log 2$

Soluzione:

$$\int tg(-x)\,dx = \int -tg\,x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$-\sin x\,dx = dt$

$$\Rightarrow \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} tg(-x)\,dx = \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} = \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| =$$

$$= \log\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\log 1} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log 2 .$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^{\frac{1}{x}} e^{t+1}\,dt =$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ ► (d) e

Soluzione:

$$\int e^{t+1}\,dt = e^{t+1} + c$$

$$\int_x^{1/x} e^{t+1}\,dt = \left[e^{t+1}\right]_x^{1/x} = e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x} = e^{0+1} - e^{-\infty} = e - 0 = e$$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x}\,dx$

(a) non esiste (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente ▶ (d) converge

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x^2+2x}$ e osserviamo che f è continua $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0)$. La funzione non è definita per $x=0$ ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{2}$$

quindi f è limitata e l'integrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sin x + (\sin x)^2}\,dx$

(a) non esiste ▶ (b) diverge positivamente (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \sin^2 x}$ e osserviamo che

$f(x) > 0 \ \forall x \in (0,1]$ e che f è continua in $(0,1]$.

Inoltre, per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x(1+\sin x)} = \frac{1}{(x+o(x^2))(1+\sin x)} = \frac{1}{x(1+o(x))(1+\sin x)}$$

Scegliendo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ otteniamo che

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

7. Data la successione $a_n = \dfrac{n\,2^n}{n!}$ risulta che

(a) $\sup(a_n) = +\infty$

(b) $\sup(a_n) = 0$

► (c) (a_n) è limitata

(d) (a_n) è strettamente crescente

Soluzione:

Osserviamo che $a_n \geq 0 \ \forall n$ e che

$$a_n = \frac{n\,2^n}{n(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Calcoliamo il limite usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^n} = \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, pertanto (a_n) è limitata.

8. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 + \cos^2 n}$

(a) diverge positivamente

► (b) converge assolutamente

(c) è indeterminata

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}\right| = \frac{1}{n^2+\cos^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente.

9. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$ è

(a) un'unione di infiniti dischi disgiunti

(b) la parte di piano delimitata da una parabola

(c) l'esterno di un disco

► (d) l'unione disgiunta di infinite corone circolari

Soluzione:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}.$$

Ricordiamo che $\sin t > 0 \iff t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $(x,y) \in \Omega \iff 2k\pi < x^2+y^2-1 < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni fissato $k \geq 0$, l'insieme

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1\}$$

è una corona circolare di centro l'origine e raggi

$\sqrt{2k\pi+1}$, $\sqrt{(2k+1)\pi+1}$.

Ω è quindi l'unione di infinite corone circolari disgiunte tra loro.

10. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

► (a) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua

(b) è continua ma non è differenziabile

(c) è differenziabile

(d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 361132 15 luglio 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	a
3	d
4	a
5	a
6	b
7	c
8	c
9	d
10	a

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x^2) < 0\}$. Allora

(a) $\sup(A) = 1$ ▶ (b) $\inf(A) = -\infty$ (c) $\inf(A) = 0$ (d) $\sup(A) = \frac{\pi}{2}$

Soluzione:

Sia $f(x) = \cos(x^2)$.

Osserviamo che la funzione f assume valori negativi per valori di x arbitrariamente piccoli. Ad esempio consideriamo

$x_n = -\sqrt{(2n+1)\pi}$

$f(x_n) = \cos\left(\left(-\sqrt{(2n+1)\pi}\right)^2\right) = \cos\left((2n+1)\pi\right) = -1 < 0$

quindi $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Poichè $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ otteniamo che $\inf(A) = -\infty$.

2. La funzione $f : (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right)$

► (a) ha sia massimo che minimo

(b) ha massimo ma non ha minimo

(c) è limitata ma non ha né massimo né minimo

(d) non è limitata

Soluzione:

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \qquad f : (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \to \mathbb{R}.$

La funzione è pari, quindi possiamo studiarla solo su $(0,+\infty)$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot \text{limitata} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^4}\left(1 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 0$

La funzione è continua, quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass generalizzato.

Osserviamo che $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(\pi) = 0$

Dato che $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) \geq 0$ otteniamo che f ha massimo,

ma $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\right) \leq 0$ quindi f ha anche minimo.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(-x)\, dx =$

(a) -1

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\log\pi - \log 4$

► (d) $-\frac{1}{2}\log 2$

Soluzione:

$$\int tg(-x)\,dx = \int -tg\,x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$-\sin x\,dx = dt$

$$\Rightarrow \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} tg(-x)\,dx = \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} = \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| =$$

$$= \log\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\log 1} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log 2 .$$

4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\arctan(\log x))}{x\,(1+(\log x)^2)}\,dx =$

► (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{4e} - 1$ (c) $\sin(\arctan e) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sin e - \sin 1$

Soluzione:

$$\int \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\log x))}{x(1+\log^2 x)}\,dx \qquad \text{sostituzione } \log x = t \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = dt$$

$$= \int \frac{\cos(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}\,dt \qquad \text{sostituzione } z = \operatorname{arctg} t \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = dz$$

$$= \int \cos z \, dz = \sin z + c = \sin(\operatorname{arctg} t) + c = \sin(\operatorname{arctg}(\log x)) + c$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\log x))}{x(1+\log^2 x)}\,dx = \Big[\sin(\operatorname{arctg}(\log x))\Big]_1^e =$$

$$= \sin(\operatorname{arctg}(\log e)) - \sin(\operatorname{arctg}(\log 1)) =$$

$$= \sin(\operatorname{arctg} 1) - \sin(\operatorname{arctg} 0) = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x}\,dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x^2+2x}$ e osserviamo che f

è continua $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0)$. La funzione non è

definita per $x=0$ ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{2}$$

quindi f è limitata e l'integrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx$

converge.

6. L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan x + \cos x}\,dx$

(a) non esiste ▶ (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\mathrm{tg}\,x + \cos x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\mathrm{tg}\,x + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos^2 x}\,dx$$

$\sin x + \cos^2 x$ non si annulla mai in $[0, \pi/2]$.

$\Rightarrow$ f è limitata $\Rightarrow$ $\int$ è integrale di Riemann.

$\Rightarrow$ converge.

7. Data la successione $a_n = \dfrac{n\,2^n}{n!}$ risulta che

▶ (a) (a_n) è strettamente crescente
(b) $\sup(a_n) = 0$
▶ (c) (a_n) è limitata
(d) $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

Osserviamo che $a_n \geq 0$ $\forall n$ e che

$$a_n = \frac{n\, 2^n}{n(n-1)!} = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Calcoliamo il limite usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^n} = \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pertanto (a_n) è limitata.

8. La serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 + \cos^2 n}$

(a) converge ma non converge assolutamente
(b) è indeterminata
▶ (c) converge assolutamente
(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n}$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2+\cos^2 n} \right| = \frac{1}{n^2+\cos^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente.

9. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y^2 - 1) > 0\}$ è

(a) l'esterno di un disco
(b) un'unione di infiniti dischi disgiunti
(c) la parte di piano delimitata da una parabola
▶ (d) l'unione disgiunta di infinite corone circolari

Soluzione:

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$.

Ricordiamo che $\sin t > 0 \iff t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $(x,y) \in \Omega \iff 2k\pi < x^2+y^2-1 < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni fissato $k \geq 0$, l'insieme

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi + 1 < x^2+y^2 < (2k+1)\pi + 1\}$$

è una corona circolare di centro l'origine e raggi

$\sqrt{2k\pi+1}$, $\sqrt{(2k+1)\pi+1}$.

Ω è quindi l'unione di infinite corone circolari disgiunte tra loro.

10. Nel punto (0,0), la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

► (a) ha le derivate parziali f_x e f_y ma non è continua (b) è differenziabile

(c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali (d) è continua ma non è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

quindi f ha entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione della funzione alla retta $\gamma(t) = (t,t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.